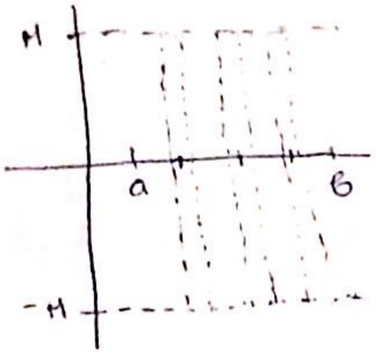
Παρατήρηση: Με παρόμοια απόδειξη, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και ασυνεχής μόνο σε $n$ σημεία (για κάποιο $n\in\mathbb{N}$), τότε είναι ολοκληρώσιμη.



Παράδειγμα:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ με } f(x)=\begin{cases} 0, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x\in\mathbb{Q},\ x=\frac{m}{n},\ m,n\in\mathbb{N},\ (m,n)=1 \end{cases}$$

Είχαμε δει, στον απειροστικό λογισμό I, ότι η $f$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο του $[0,1]$ και ασυνεχής σε κάθε ρητό του $[0,1]$.

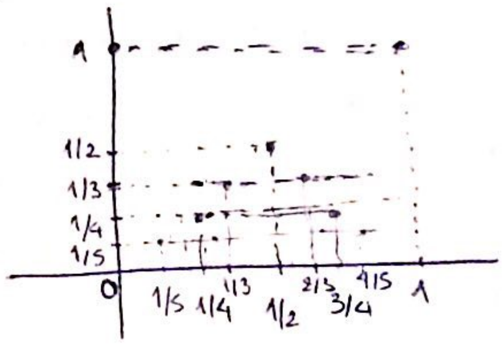
Θα αποδείξουμε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη.

Όπως, εύκολα, βλέπουμε, ισχύει $L(f,P)=0$ για κάθε διαμέριση $P$ του $[0,1]$. Έστω $\varepsilon>0$. Χβτγ υποθέτω ότι $\varepsilon<2$.

Θέτουμε $A=\{x\in[0,1] : f(x)\geq \varepsilon/2\}$.

Το σύνολο $A$ είναι πεπερασμένο

(περιέχει το πολύ $1+2+\dots+\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$ σημεία).



Έστω $x_0<x_1<\dots<x_N$ μια διάταξη των στοιχείων του $A$.

$x_0=0$ και $x_N=1$ διότι $\varepsilon<2$.

Επιλέγουμε $[a_k,b_k]$, $k=0,1,\dots,N$ ξένα ανά δύο, διαστήματα του $[0,1]$ με $b_k-a_k<\frac{\varepsilon}{2(N+1)}$ και θέτουμε

$P=\{0=a_0<b_0<a_1<b_1<\dots<a_N<b_N=1\}$

Παρατηρούμε ότι σε καθένα από τα διαστήματα $[b_k, a_{k+1}]$, ισχύει $f(x) < \varepsilon/2 \ \forall x$

$$U(f,P) \le 1\cdot(b_0-a_0) + \frac{\varepsilon}{2}(a_1-b_0) + 1\cdot(b_1-a_1) + \frac{\varepsilon}{2}(a_2-b_1)+\dots+\frac{\varepsilon}{2}(a_N-b_{N-1}) + 1\cdot(b_N-a_N)$$

$$\le \sum_{k=0}^{N} (b_k-a_k) + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{N} (a_k-b_{k-1}) \le (N+1)\frac{\varepsilon}{2(N+1)} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 = \varepsilon.$$

Έτσι, $U(f,P)-L(f,P)\le\varepsilon$.

Από το κριτήριο Riemann, η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \underline{\int_0^1} f(t)\,dt = \sup\{L(f,P),\ P \text{ διαμέριση του } [0,1]\} = \sup\{0\} = 0.$$

Αποδεικνύεται το εξής:

<u>Θεώρημα</u>: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και θέσουμε $A(f)=\{x\in[a,b]: f \text{ ασυνεχής στο } x\}$.
Η $f$ είναι ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει μια ακολουθία διαστημάτων $(a_k,b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε: $A(f)\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k,b_k)$ και $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k-a_k)<\varepsilon$

<u>Σημαντική Άσκηση</u>: (ν θεωρία)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)\ge 0\ \forall x\in[a,b]$. Αν $\int_a^b f(x)dx=0$, τότε $f(x)=0\ \forall x\in[a,b]$

[ <u>Ισοδύναμα</u>
Αν $f(x)\ge 0\ \forall x\in[a,b]$, $f$ συνεχής και $\exists x_0\in[a,b]$ με $f(x_0)>0$, τότε $\int_a^b f(x)dx>0$. ]

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $x_0\in[a,b]$ με $f(x_0)>0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0\in(a,b)$. (Αν $x_0=a$, αντικαθιστούμε το $x_0$ με κάποιο άλλο σημείο $x_1$, που θα ανήκει στο $(a,b)$, για το οποίο, $f(x_1)>0$. Ομοίως, αν $x_0=b$.)

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας, για $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$.

$\exists\delta>0$ με $\delta<\min\{x_0-a,\ b-x_0\}$ ώστε $|f(x)-f(x_0)|<\frac{f(x_0)}{2}\ \forall x\in[x_0-\delta,x_0+\delta] \Rightarrow f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$

Έτσι, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \ge \frac{f(x_0)}{2}(2\delta)>0$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, ώστε $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$. Να δείξουμε ότι $\exists\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

<u>Απόδειξη</u>:

Θέτουμε $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[a,b]$.

Τότε, η $h$ συνεχής και

$$\int_a^b h(x)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=0.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\exists \xi \in [a,b]$ ώστε $h(\xi)=0$.

Αν δεν υπάρχει τέτοιο $\xi$, τότε:

Είτε α) $h(x)>0 \ \forall x \in [a,b]$

Είτε β) $h(x)<0 \ \forall x \in [a,b]$

(Από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών)

α) Αφού η $h$ συνεχής σε κλειστό διάστημα, η $h$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή $\exists y \in [a,b]$ ώστε $h(x) \geq h(y) \ \forall x \in [a,b]$

$\int_a^b h(x)dx = h(y)(b-a) > 0$ Άτοπο!

β) Αφού η $h$ συνεχής σε κλειστό διάστημα, η $h$ λαμβάνει μέγιστη τιμή, δηλαδή $\exists z \in [a,b]$ ώστε $h(x) \leq h(z) \ \forall x \in [a,b]$

$\int_a^b h(x)dx = h(z)(b-a) < 0$ Άτοπο!

Επομένως, $\exists \xi \in [a,b]$ ώστε $h(\xi)=0$, δηλαδή $g(\xi)=f(\xi)$.

<u>Υπενθύμιση:</u> Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε θέτοντας $F(x)=\int_a^x f(t)dt$.

α) Η $F$ είναι συνεχής

β) Αν η $f$ είναι συνεχής, τότε η $F$ είναι παραγωγίσιμη και $F'=f$.

<u>Άσκηση:</u> Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Να δείξουμε ότι $\exists \xi \in [a,b]$ ώστε

$\int_a^\xi f(t)dt = \int_\xi^b f(t)dt$

<u>Απόδειξη:</u>

Ορίζουμε $G(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt - \left( \int_a^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right) = 2\int_a^x f(t)dt - \int_a^b f(t)dt$

$x \in [a,b]$

Η $G$ συνεχής και $G(a) = -\int_a^b f(t)dt$ ενώ $G(b) = \int_a^b f(t)dt$.

Άρα $G(a) \cdot G(b) = -\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq 0$.

Συνεπώς, $\exists \xi \in [a,b]$ ώστε $G(\xi)=0 \Rightarrow \int_a^\xi f(t)dt = \int_\xi^b f(t)dt$.

<u>Παρατήρηση:</u>

$\to$ Αν $\int_a^b f(t)dt \neq 0$, τότε $G(a) \cdot G(b) < 0$, άρα $\exists \xi \in (a,b)$ ώστε $G(\xi)=0$.

$\to$ Αν $\int_a^b f(t)dt = 0$, ενδέχεται να μην υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $G(\xi)=0$.

<u>π.χ.</u> $f(x)=x$, $x \in [-1,1]$

Θέτοντας $G(x) = \int_{-1}^x f(t)dt - \int_x^1 f(t)dt$

Τα μοναδικά $x$, για τα οποία $G(x)=0$ είναι τα $-1, 1$.

<u>Άσκηση:</u> Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Θέτουμε $\varphi(x) = \int_0^{f(x)} g(t)\,dt$.
Να δείξουμε ότι η $\varphi$ παραγωγίσιμη και να βρούμε τη $\varphi'$.

<u>Απόδειξη:</u>

Θέτοντας $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, επειδή $g$ συνεχής, η $G$ είναι παραγωγίσιμη και $G'(x) = g(x)$ $\forall x$. Παρατηρούμε ότι $G(f(x)) = \int_0^{f(x)} g(t)\,dt = \varphi(x)$ άρα $\varphi = G \circ f$.

Άρα, η $\varphi$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση δύο παραγωγίσιμων και

$$\varphi'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$$

<u>Άσκηση:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, $g_1, g_2$ παραγωγίσιμες και $\delta > 0$.

Ορίζουμε $\varphi(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt$. Να δείξουμε ότι η $\varphi$ είναι παραγωγίσιμη και να βρούμε τη $\varphi'$.

<u>Απόδειξη:</u>

$$\varphi(x) = \int_0^{g_2(x)} f(t)\,dt - \int_0^{g_1(x)} f(t)\,dt$$

$$\varphi'(x) = f(g_2(x)) \cdot g_2'(x) - f(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$$

<u>Π.χ.</u> $f$ συνεχής και $\varphi(x) = \int_{x^2-\delta}^{x^2+\delta} f(t)\,dt$

$$\varphi'(x) = f(x^2+\delta) \cdot 2x - f(x^2-\delta) \cdot 2x.$$